

## Zur Theorie der Kernrotationen\* III

VON HANS HACKENBROICH

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforsch. 16 a, 1083—1089 [1961]; eingegangen am 20. März 1961)

The interplay of the quantum mechanical rotation of a core consisting of closed shells and nucleons outside the closed shells is considered. The core is characterized by its moment of inertia and its deformation is taken to be the same as the deformation of the one particle potential. Energies and wave functions of the system are calculated with the help of a variation method. The distortion of the wave function of the outer nucleons due to the rotation is considerably smaller than computed from first order perturbation theory. The INGLIS formula for rotational energies is a limiting case of our energy equation.

The core moment of inertia enters the model as a parameter. This parameter can be estimated from the vibrational energies of spherical nuclei and from the rotational-vibrational interaction, but the two values obtained are not in good agreement. In our example ( $^{158}\text{Gd}$ ) only the second value gives the correct moment of inertia of the whole nucleus.

Im INGLISSCHEN Modell der Kernrotationen — das den vorangegangenen Arbeiten<sup>1</sup> zugrunde lag — wird die Kernrotation klassisch behandelt. In dieser Arbeit betrachten wir ein Modell, das wohl viele Züge des INGLISSCHEN übernimmt, aber eine quantenmechanische Beschreibung des Kerns gestattet. Dazu benutzen wir eine Vorstellung, die von BOHR<sup>2</sup> für solche Kerne entwickelt wurde, die aus einem magischen Rumpf und wenigen Außennucleonen bestehen, obwohl für die hier behandelten Kerne — die viele Außennucleonen besitzen — die Berechtigung dieses Modells zunächst zweifelhaft sein mag: Wir werden nämlich den Kernrumpf pauschal behandeln, ihm nur eine Deformation  $\lambda$  und ein Trägheitsmoment  $\Theta_R$  zuschreiben, ferner seine Wechselwirkung mit den Außennucleonen durch ein auf die Außennucleonen wirkendes mittleres Potential — das dieselbe Deformation wie der Kernrumpf habe — approximieren. Die Parameter  $\lambda$  und  $\Theta_R$  sollen durch Vergleich mit dem Experiment festgelegt werden. Das Ziel der Rechnung ist die Bestimmung von Trägheitsmomenten der Gesamtkerne.

## A. Die Annahmen des Modells

Wir wollen für unsere Rechnung folgende Annahmen machen:

a) Der Kernrumpf sei ein axialsymmetrisch deformiertes starres Gebilde; zur Beschreibung seiner dynamischen Eigenschaften genüge die Angabe eines Trägheitsmomentes  $\Theta_R$ .

\* Der Aufsatz beruht auf einer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät zu Göttingen im Jahre 1960 vorgelegten Dissertation.

b) Die Wirkung des Kernrumpfes auf die Außennucleonen soll durch ein mittleres Potential beschrieben werden; dieses Potential sei mit dem Kernrumpf starr gekoppelt. Wir werden vorläufig annehmen, das Potential sei ein axialsymmetrisches Oszillatorpotential (vgl. hierzu jedoch Abschnitt E).

Um die Deformation des Gesamtkernes angeben zu können, wollen wir annehmen, daß Kernrumpf und Potential dieselbe Deformation haben.

c) Die energetisch tiefsten Neutronen- und Protonenzustände im mittleren Potential sollen nicht durch Außennucleonen besetzt werden dürfen; die Zahl der freibleibenden Zustände soll mit der Zahl der im Kernrumpf vorhandenen Neutronen bzw. Protonen übereinstimmen.

d) Die Wechselwirkungen der Außennucleonen untereinander sollen vernachlässigt werden.

Der zu diskutierende HAMILTON-Operator lautet somit

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\text{rot}} + \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_P \\ &= \left[ \frac{\hbar^2}{2\Theta_R} (\vec{I}^2 - \mathbf{I}_3^2) \right] + \left[ -\frac{\hbar^2}{2\Theta_R} (\mathbf{I}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_2) \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\hbar^2}{2\Theta_R} (\mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2) \right] \\ &\quad + \left[ \sum_p T_p + \frac{m\omega^2}{2} \sum_p (\lambda^4 u_p^2 + \lambda^4 v_p^2 + \lambda^{-8} w_p^2) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

( $\vec{I}$  Gesamtdrehimpuls des Kerns;  $\vec{L}$  Gesamtdrehimpuls der Außennucleonen; die übrigen Bezeichnungen sind in I erklärt).

Der HAMILTON-Operator (1) ist schon in den er-

<sup>1</sup> H. HACKENBROICH, Z. Naturforsch. 16 a, 1068 [1961] und 16 a, 1077 [1961], zitiert als I bzw. II.

<sup>2</sup> A. BOHR, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. 26, 14 [1952].



sten Arbeiten von BOHR und MOTTELSON<sup>3</sup> behandelt worden; diese Autoren haben jedoch stets die Annahme gemacht, die zum Operator  $\vec{L}^2$  gehörende Quantenzahl  $L$  und  $K = \Omega$  seien gute Quantenzahlen. Dies ist aber nicht streng richtig: Die Operatoren  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  und  $\mathcal{H}_S$  sind mit  $\mathcal{H}_{\text{rot}} + \mathcal{H}_P$  nicht vertauschbar.

LÜDERS<sup>4</sup> hat einen Versuch gemacht, den Operator  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  störungstheoretisch zu behandeln. Der Operator erzeugt Einteilchenanregungen, die der Auswahlregel

$$\Delta K = \Delta \Omega = \pm 1$$

gehörten. In zweiter Näherung ergab sich eine – selbstverständlich negative – zu  $I(I+1)$  proportionale Zusatzenergie, also formal eine Abänderung des Trägheitsmomentes  $\Theta_{\text{eff}}$  gegenüber seinem ungestörten Wert  $\Theta_R$ . Leider war dieses effektive Trägheitsmoment bei physikalisch vernünftiger Wahl der Parameter negativ; somit erwies sich diese einfache Störungstheorie als unbrauchbar. Da sich die Parameter, die wir in Gl. (1) einsetzen werden, von den bei LÜDERS verwendeten nicht größenordnungsmäßig unterscheiden, würde sich bei einer analogen Rechnung dasselbe ergeben.

Es ist aber sehr wichtig, auch den Operator  $\mathcal{H}_S$  zu berücksichtigen, der bewirkt, daß auch in beliebiger hoher Näherung der Störungstheorie noch Energiekorrekturen proportional  $I(I+1)$  auftreten. Leider läßt sich eine solche Störentwicklung nicht in einfacher Weise summieren; außerdem würden Konvergenzschwierigkeiten auftreten. Dies läßt einen Verzicht auf die Störungstheorie ratsam erscheinen, zwingt aber auch zu einer sorgfältigen Behandlung von  $\mathcal{H}_S$ .

## B. Der Variationsansatz

Wir werden ein Variationsverfahren verwenden und dabei als Ansatz für die Variationsfunktion eine Linearkombination von Eigenfunktionen zu  $\mathcal{H}_{\text{rot}} + \mathcal{H}_P$  benutzen. Aus Bequemlichkeitsgründen beschränken wir uns fortan auf die Zustände der tiefsten Rotationsbande von  $g-g$ -Kernen; unsere Argumente können aber immer leicht verallgemeinert werden.

Wir wollen Eigenfunktionen zu  $\mathcal{H}_{\text{rot}} + \mathcal{H}_P$  mit dem Symbol  $|I, M, K; \dots\rangle$  bezeichnen; die hinter dem Semikolon stehenden Quantenzahlen sollen den

Zustand der Außennukleonen charakterisieren. Zum tiefsten Eigenzustand von  $\mathcal{H}_{\text{rot}} + \mathcal{H}_P$  gehöre die Funktion  $|I, M, K; 0\rangle$ ; diese Funktion ist ein Produkt aus der Kreiselfunktion  $D^I_{M,K}$  – die normiert sei – und einer SLATER-Determinante aus Einteilchenfunktionen, in der mit jedem Einteilchenzustand auch der Zustand mit entgegengesetztem Vorzeichen der 3-Komponente des Drehimpulses besetzt ist.

Wir wollen die Quantenzahlen  $n_3$ ,  $n_{\perp}$  und  $|l_3| = |m + s_3|$  eines Einteilchenzustandes (siehe I) durch einen der Buchstaben  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  zusammenfassen; dabei sollen die Zustände  $a, b, c$  in  $|I, M, 0; 0\rangle$  besetzt, die Zustände  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $|I, M, 0; 0\rangle$  nicht besetzt sein. Dann können irgendwelche Funktionen der Außennukleonen in einfacher Weise durch die Ersetzung von Einteilchenzuständen gegenüber  $|I, M, 0; 0\rangle$  charakterisiert werden; und zwar werden wir unter dem Symbol  $(a, \alpha)_+$  verstehen, daß in den Zuständen  $a$  und  $\alpha$  das Vorzeichen der Quantenzahl  $l_3$  so gewählt werden soll, daß bei der Ersetzung von  $a$  durch  $\alpha$  die Quantenzahl  $\Omega$  (um eine Einheit) wächst; entsprechend  $(a, \alpha)_-$ .

Schließlich führen wir Funktionen ein, die gegenüber der Anwendung der in<sup>3</sup> angegebenen Symmetrieoperatoren  $R_1$  und  $R_2$  invariant sind; in diesen Funktionen erscheinen die Vorzeichen von  $K$  und  $\Omega$  nicht mehr. Beispielsweise ist

$$|I, M, 1; (a, \alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |I, M, +1; (a, \alpha)_+\rangle + \eta_{I,1; (a, \alpha)_+} |I, M, -1; (a, \alpha)_-\rangle \}, \quad (2)$$

$[\eta_{I,1; (a, \alpha)_+}$  Phasenfaktor, vgl. Gl. (II, 15) aus<sup>3</sup>]. Unter Benutzung dieser Definition können wir den Ansatz für die Wellenfunktion – die wir mit  $|I, M\rangle$  abkürzen – hinschreiben:

$$\begin{aligned} |I, M\rangle = & |I, M, 0; 0\rangle \\ & + \sum_{\alpha \text{ aus derselben Schale wie } a} A^I_{(a, \alpha)} |I, M, 1; (a, \alpha)\rangle \\ & \cdot \langle I, M, 1; (a, \alpha) | \mathbf{I}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_2 | I, M, 0; 0\rangle \\ & + \sum_{\alpha \text{ zwei Schalen höher als } a} B^I_{(a, \alpha)} |I, M, 1; (a, \alpha)\rangle \\ & \cdot \langle I, M, 1; (a, \alpha) | \mathbf{I}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_2 | I, M, 0; 0\rangle \\ & + \sum_{\substack{\alpha \text{ aus derselben Schale wie } a \\ \beta \text{ aus derselben Schale wie } b}} C^I_{(a, \alpha)(b, \beta)} |I, M, 0; (a, \alpha)(b, \beta)\rangle \\ & \cdot \langle I, M, 0; (a, \alpha)(b, \beta) | \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 | I, M, 0; 0\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>3</sup> A. BOHR u. B. MOTTELSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **27**, 16 [1953].

<sup>4</sup> G. LÜDERS, Z. Naturforschg. **11 a**, 617 [1956], **12 a**, 353 [1957].

$\mathcal{H}_{\text{int}}$  liefert nichtverschwindende Matrixelemente zwischen allen in der ersten und zweiten Summe enthaltenen Funktionen und  $|I, M, 0; 0\rangle$ , ferner zwischen Funktionen der ersten bzw. zweiten Summe und den Funktionen der dritten Summe. Es existieren nichtverschwindende Matrixelemente von  $\mathcal{H}_S$  zwischen den Funktionen der dritten Summe und  $|I, M, 0; 0\rangle$ , außerdem zwischen je zwei der in der ersten bzw. zweiten Summe enthaltenen Funktionen und zwischen bestimmten Funktionen der dritten Summe.

Somit haben wir zur Variation fast alle Funktionen zugelassen, die in erster störungstheoretischer Näherung zu  $|I, M, 0; 0\rangle$  beigemischt wurden. Wir haben in (3) eine vierte Summe weggelassen, in der Funktionen stehen müßten, die durch eine Einteilchenanregung mittels  $\mathcal{H}_S$  aus  $|I, M, 0; 0\rangle$  entstehen; diese Summe würde jedoch nur eine zur Zahl der Außennukleonen proportionale Zahl von Funktionen enthalten, während die Zahl von Summanden der dritten Summe zum Quadrat der Zahl der Außennukleonen proportional ist.

### C. Die Behandlung der Variationsgleichung

Unsere Aufgabe besteht in der Festlegung der Parameter  $A_{(a,\alpha)}^I$ ,  $B_{(a,\alpha)}^I$ ,  $C_{(a,\alpha)(b,\beta)}^I$  aus (3). Dazu benutzen wir die Variationsgleichung

$$\delta \langle I, M | \mathcal{H} | I, M \rangle - E \delta \langle I, M | I, M \rangle = 0 \quad (4)$$

in der Form

$$\delta \langle I, M | \mathcal{H} - \frac{\hbar^2}{2\Theta_R} \vec{I}^2 | I, M \rangle - \tilde{E} \delta \langle I, M | I, M \rangle = 0 \quad (4a)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{E} = E - \frac{\hbar^2}{2\Theta_R} I(I+1). \quad (5)$$

Im folgenden verwenden wir die Abkürzungen

$$e_0 = \langle I, M, 0; 0 | - \frac{\hbar^2}{2\Theta_R} I_3^2 + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_P | I, M, 0; 0 \rangle \quad (6)$$

entsprechend  $e_{(a,\alpha)}$  und  $e_{(a,\alpha)(b,\beta)}$ . Zunächst sehen wir, daß man alle in (4a) auftretenden Matrixelemente näherungsweise durch Einteilchenmatrixelemente oder Produkte von Einteilchenmatrixelementen darstellen kann: Wir sehen etwa aus Gl. (7) von I

$$\langle I, M, 1; (a, \alpha) | \mathbf{I}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_2 | I, M, 0; 0 \rangle = \sqrt{2} \sqrt{I(I+1)} \langle \alpha | l_1 | a \rangle_+ . \quad (7)$$

Hierin legt der Vorzeichenindex der Matrixelemente das Vorzeichen von  $l_3$  in den Zuständen  $a$  und  $\alpha$

analog zu unserer Konvention über die Bezeichnungen der Funktionen fest.

$$\begin{aligned} & \text{Unter der Voraussetzung } a \neq b, \alpha \neq \beta \text{ ist weiter} \\ & \langle I, M, 1; (a, \alpha) | \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 | I, M, 1; (b, \beta) \rangle \quad (8) \\ & = 4 \{ \langle \alpha | l_1 | a \rangle_+ \langle b | l_1 | \beta \rangle_+ - \langle \alpha | l_1 | \beta \rangle_+ \langle b | l_1 | a \rangle_+ \} . \end{aligned}$$

Die Funktion (3) ist so gewählt, daß in allen innerhalb (4a) auftretenden Matrixelementen der Form (8) der auf der rechten Seite zuerst aufgeführte Term nicht verschwindet. Wenn wir uns auf die tiefste Rotationsbande beschränken, verschwinden die auf der rechten Seite von (8) an zweiter Stelle angeschriebenen PAULI-Prinzip-Glieder in den Matrixelementen von  $\mathcal{H}_S$  zwischen Funktionen aus der ersten Summe in (3) vermöge der Auswahlregeln der Matrixelemente von Drehimpulsoperatoren zwischen Oszillatorfunktionen (dabei haben wir den Spin vernachlässigt); die Summe der Matrixelemente von  $\mathcal{H}_S$  zwischen Funktionen der zweiten Summe in (3) enthält wohl nichtverschwindende Austauschglieder, aber der Absolutbetrag dieser Summe ist im Verhältnis (1 : Zahl der Außennukleonen) kleiner als der Betrag der in an erster Stelle angeschriebenen Terme; somit dürfen wir sie näherungsweise weglassen.

Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \langle I, M, 0; (a, \alpha) (b, \beta) | \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 | I, M, 0; 0 \rangle \quad (9) \\ & = 4 \sqrt{2} \langle \alpha | l_1 | a \rangle_+ \langle \beta | l_1 | b \rangle_+ , \\ & \langle I, M, 0; (a, \alpha) (b, \beta) | \mathbf{I}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_2 | I, M, 1; (a, \alpha) \rangle \\ & = \sqrt{I(I+1)} \langle \beta | l_1 | b \rangle_+ \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & \langle I, M, 0; (a, \alpha) | \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 | I, M, 0; (a, \alpha) c, \gamma \rangle \\ & = 4 \{ \langle \beta | l_1 | b \rangle_+ \langle c | l_1 | \gamma \rangle_+ \\ & \quad - \langle \beta | l_1 | \gamma \rangle_+ \langle c | l_1 | b \rangle_+ \} . \quad (10) \end{aligned}$$

Aus denselben Gründen wie bei (8) genügt es auch bei der Behandlung von (10), nur die auf der rechten Seite an erster Stelle stehenden Glieder zu berücksichtigen.

Nun können wir aus (4a) folgende Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} & A_{(a,\alpha)}^I (e_{(a,\alpha)} - \tilde{E}) - \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \\ & - \frac{4\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(b,\beta)} C_{(a,\alpha)(b,\beta)}^I |\langle \beta | l_1 | b \rangle_+|^2 \\ & + 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(b,\beta) \neq (a,\alpha)} A_{(b,\beta)}^I |\langle \beta | l_1 | b \rangle_+|^2 \\ & + 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(b,\beta)} B_{(b,\beta)}^I |\langle \beta | l_1 | b \rangle_+|^2 = 0 , \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{(a,\alpha)}^I(e_{(a,\alpha)} - \tilde{E}) - \frac{\hbar^2}{\Theta_R} & \quad (12) \\
+ 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(b,\beta)} A_{(b,\beta)}^I |\langle \beta | l_1 | b \rangle_+|^2 \\
+ 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(b,\beta) \neq (a,\alpha)} B_{(b,\beta)}^I |\langle \beta | l_1 | b \rangle_+|^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{(a,\alpha)(b,\beta)}^I(e_{(a,\alpha)} - \tilde{E}) + \frac{\hbar^2}{2 \Theta_R} & \quad (13) \\
- 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} I(I+1) (A_{(a,\alpha)}^I + A_{(b,\beta)}^I) \\
+ 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(c,\gamma) \neq (a,\alpha)} C_{(a,\alpha)(c,\gamma)}^I |\langle \gamma | l_1 | c \rangle_+|^2 \\
+ 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(c,\gamma) \neq (b,\beta)} C_{(c,\gamma)(b,\beta)}^I |\langle \gamma | l_1 | c \rangle_+|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Wir wenden uns zunächst der Beziehung (13) zu: Unter der Voraussetzung  $I(I+1) A_{(a,\alpha)}^I \ll 1$  dürfen wir den zu  $I(I+1)$  proportionalen Term weglassen; damit werden die  $C_{(a,\alpha)(b,\beta)}^I$  von  $I$  unabhängig. Diese Voraussetzung wird sich für die tiefsten Zustände einer Rotationsbande rechtfertigen lassen.

Ferner nehmen wir bei der Auswertung von Summen der Form

$$\sum_{(b,\beta)} \frac{|\langle \beta | l_1 | b \rangle_+|^2}{e_{(a,\alpha)(b,\beta)} - \tilde{E}}$$

$$\text{an, daß } e_{(a,\alpha)(b,\beta)} - \tilde{E} \approx 2(e_{(a,\alpha)} - \tilde{E}). \quad (14)$$

Diese Annahme verdient mehr Kritik als die vorher gemachte; sie ist aber sicher berechtigt, wenn wir es mit einem Oszillatorpotential zu tun haben und wenn ferner  $(\hbar^2/\Theta_R)/(e_{(a,\alpha)} - e_0) \ll 1$  ist. Schließlich wollen wir die Summationsausschließung in (13) nicht beachten.

Unter diesen Annahmen verifiziert man die Lösung für  $C_{(a,\alpha)(b,\beta)}^I$ :

$$\begin{aligned}
C_{(a,\alpha)(b,\beta)}^I = - \frac{\hbar^2}{2 \Theta_R} (e_{(a,\alpha)} - \tilde{E})^{-1} & \quad (15) \\
\cdot \left( 1 + 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{(c,\gamma)} \frac{|\langle \gamma | l_1 | c \rangle_+|^2}{e_{(c,\gamma)} - \tilde{E}} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Für die Behandlung von (11) und (12) führen wir Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{\alpha \text{ aus derselben Schale wie } a} \frac{|\langle \alpha | l_1 | a \rangle_+|^2}{\Delta_{(a,\alpha)}}, \\
S_2 &= 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \sum_{\alpha \text{ nicht aus derselben Schale wie } a} \frac{|\langle \alpha | l_1 | a \rangle_+|^2}{\Delta_{(a,\alpha)}}, \\
\sigma &= 1 - \frac{1}{2} \frac{S_1}{1+S_1};
\end{aligned} \quad (16)$$

und dabei ist

$$\Delta_{(a,\alpha)} = e_{(a,\alpha)} - \tilde{E} - 2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} |\langle \alpha | l_1 | a \rangle_+|^2. \quad (17)$$

Nun machen wir folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
A_{(a,\alpha)}^I &= F_1 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \Delta_{(a,\alpha)}^{-1}, \\
B_{(a,\alpha)}^I &= F_2 \frac{\hbar^2}{\Theta_R} \Delta_{(a,\alpha)}^{-1}.
\end{aligned} \quad (18)$$

Setzen wir dies in (11) und (12) ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sigma - F_1 S_1 - F_2 S_2, \\
F_2 &= 1 - F_1 S_1 - F_2 S_2,
\end{aligned} \quad (19)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left( 1 - \frac{S_1}{2} \frac{1+S_2}{1+S_2} \right) (1+S_1+S_2)^{-1}, \\
F_2 &= \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{S_1^2}{1+S_1} \right) (1+S_1+S_2)^{-1}.
\end{aligned} \quad (20)$$

Wir setzen nun

$$\tilde{E} = e_0 + \varepsilon_1 I(I+1) + \varepsilon_2. \quad (21)$$

Die  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  enthalten  $I$  explizit nicht mehr; sie können mit Hilfe der nun bekannten Funktion  $|I, M\rangle$  leicht berechnet werden.

Das uns hier allein interessierende  $\varepsilon_1$  lautet:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= [F_1^2 S_1 + F_2^2 S_2 - 2 \sigma F_1 S_1 - 2 F_2 S_2 \\
&\quad + (F_1 S_1 + F_2 S_2)^2] \frac{\hbar^2}{\Theta_R}.
\end{aligned} \quad (22)$$

Das effektive Trägheitsmoment ist demnach

$$\frac{\hbar^2}{\Theta_{\text{eff}}} = \frac{\hbar^2}{\Theta_R} + 2 \varepsilon_1. \quad (23)$$

Wir sehen aus (2), wie wichtig es ist, im Ansatz (3) für  $|I, M\rangle$  die dritte Summe zu berücksichtigen: Geschähe dies nicht, wäre der Ausdruck für das effektive Trägheitsmoment in der Näherung

$$\Delta_{(a,\alpha)} = e_{(a,\alpha)} - e_0$$

nicht einmal notwendig positiv.

(22) stimmt nur im Grenzfall  $S_1 \ll 1$ ,  $S_2 \ll 1$  mit der Formel von INGLIS (I, 2 a) überein; man beachte beim Vergleich, daß in  $S_1$  und  $S_2$  jeweils nur die Hälfte der Summanden wie in der Summe (I, 2 a) auftreten.

## D. Diskussion des Ergebnisses

Im Laufe unserer Rechnung wurden Energiekorrekturen proportional  $I^2(I+1)^2$  unterdrückt, und zwar als Folge der von (13) zu (14) führenden Näherungen; entsprechendes geschieht, wenn man die Beziehung (21) näherungsweise löst, indem man in den Größen  $S_1$  und  $S_2$  die Ausdrücke  $\Delta_{(a,\alpha)}$



durch  $e_{(a, \alpha)} - e_0$  ersetzt. Es läßt sich abschätzen, daß diese Energiekorrekturen bei den tiefsten Zuständen einer Rotationsbande noch klein gegenüber den von der Rotations-Vibrations-Wechselwirkung herrührenden Termen proportional  $I^2(I+1)^2$  sind.

Man kann sich überlegen, ob man das hier geschilderte Rechenverfahren nicht durch Erweiterung des Ansatzes für die Wellenfunktion verbessern kann. Das ist zwar möglich, muß aber durch Vernachlässigungen bei der Rechnung erkauft werden, die über die soeben referierten Vernachlässigungen weit hinaus gehen. Auch durch eine Verbesserung des Ansatzes für die Wellenfunktion erhält man Energiekorrekturen proportional zu höheren Potenzen von  $I(I+1)$ .

Es soll noch einmal betont werden, daß die hier gegebene formale Behandlung des HAMILTON-Operators (1) wesentlich auf den Annahmen b) und d) beruht. Ohne d) wäre schon die einfache Zerlegung des Matrixelementes von  $\mathcal{H}_S$  in ein Produkt von Einteilchenmatrixelementen nicht möglich\*; ohne b) könnte man die in (8) und (10) auftretenden Austauschglieder nicht vernachlässigen, ebenfalls wäre die Näherung (14) nicht erlaubt. Dagegen wurde bis jetzt die absolute Größe des Trägheitsmomentes des Rumpfes nur bei der Rechtfertigung der Näherung (14) benutzt.

### E. Vergleich mit dem Experiment: der Kern $^{158}\text{Gd}$

Wenn wir nun die Betrachtungen der vorangehenden Abschnitte auf den Kern  $^{158}\text{Gd}$  anwenden, werden wir bei der Berechnung von  $\varepsilon_1$  nach (22) die Größe  $\Delta_{(a, \alpha)}$  durch  $e_{(a, \alpha)} - e_0$  ersetzen.

Zunächst müssen wir uns fragen, ob wir unsere Rechnungen auch dann verwenden können, wenn wir statt eines Oszillatorpotentials ein NILSSON-Potential annehmen, — wie es nötig ist, um die Kerneigenschaften konsistent zu beschreiben. Dazu ist erstens erforderlich, daß die Matrixelemente von  $l_1$  zwischen den Einteilchenfunktionen in guter Näherung durch die Matrixelemente von  $l_1$  zwischen Oszillatorfunktionen ersetzt werden können. Dies ist aber für große Deformationen erlaubt, da dann die Einteilchenfunktionen „fast“ Oszillatorfunktionen

sind. Man sieht aus den in I angegebenen Matrixelementen, daß die Auswahlregeln auch bei den wirklichen Kerndeformationen gut erfüllt sind: Matrixelemente, die für große Deformationen asymptotisch verschwinden, sind um mindestens eine Größenordnung kleiner als die asymptotisch nicht verschwindenden Matrixelemente. Zweitens muß die Näherung (14) erlaubt sein. Sie bedeutet, daß die Energiedifferenzen zwischen Einteilchenzuständen mit  $\Delta l_3 = \pm 1$ ,  $\Delta n_3 = \pm 1$ ,  $\Delta n_{\perp} = \pm 1$  ungefähr gleich groß sein sollen; dies ist ungefähr erfüllt, wie wir aus der für große Deformationen gültigen Näherungsgleichung (6) aus I ersehen können.

Unsere Schlüsse werden also nicht berührt, wenn wir das mittlere Potential durch das NILSSON-Potential approximieren.

Wir wollen nun versuchen, einen begründeten Wert für den Parameter  $\hbar^2/\Theta_R$  zu gewinnen. Setzen wir beim  $^{158}\text{Gd}$  die Größe  $\hbar \omega = 8,8$  MeV und nehmen wir für den Rumpf das Trägheitsmoment starrer Rotation an (berechnet unter der Voraussetzung, daß der Rumpf abgeschlossene Oszillatorschalen enthalte und die Deformation  $\beta = 0,46$  sei), so wird

$$3 \hbar^2/\Theta_{R \text{ starr}} = 77 \text{ keV}$$

und damit  $3 \hbar^2/\Theta_R \approx 40 \text{ keV}$ .

Nimmt man für das Trägheitsmoment des Rumpfes das Trägheitsmoment wirbelfreier, inkompressibler Strömung, das man aus der Gleichung

$$\Theta_{\text{wir}} = \Theta_{\text{starr}} \cdot \beta^2 [0,89 + O(\beta^2)]$$

gewinnen kann, so wird  $3 \hbar^2/\Theta_{R \text{ wir}} = 420 \text{ keV}$

und damit  $3 \hbar^2/\Theta_{\text{eff}} \approx 190 \text{ keV}$ .

Wir würden das richtige Ergebnis, nämlich

$$3 \hbar^2/\Theta_{\text{eff}} \approx 79,5 \text{ keV} \quad (24)$$

erhalten, wenn wir  $3 \hbar^2/\Theta_R \approx 140 \text{ keV}$  setzten.

Wir überlegen uns jetzt, ob es außer dem Trägheitsmoment des Kernes noch andere Größen gibt, aus denen auf  $\hbar^2/\Theta_R$  geschlossen werden kann.

Dazu wollen wir den Ansatz für den HAMILTON-Operator (1) in der schon von BOHR und MOTTELSON<sup>3</sup> vorgezeichneten Weise erweitern; wohlbekannte Ergebnisse und Bezeichnungen dieser Autoren wollen wir hier übernehmen. Wir machen für den

\* Immerhin könnten Wechselwirkungen des in II betrachteten Typs betrachtet werden; wie dort gezeigt wurde, genügt es nämlich, ihren Einfluß im Erwartungswert der Energien zu berücksichtigen. Obwohl also eine Verbindung der in II

und III diskutierten Modelle möglich erscheint, wird dies nicht versucht, da es im gegenwärtigen Stand der Theorie noch nicht gelingt, den Parameter  $\hbar^2/\Theta_R$  sicher zu bestimmen.

HAMILTON-Operator des Rumpfes  $\mathcal{H}_R$ , der mit  $\mathcal{H}$  durch

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_P \quad (25)$$

zusammenhängen soll, folgenden Ansatz

$$\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_{R, \text{vib}}(\beta, \gamma) + \mathcal{H}_{R, \text{Dreh}}. \quad (26)$$

$\mathcal{H}_{R, \text{vib}}$  ist der HAMILTON-Operator von Vibrationen um Gleichgewichtslagen  $\beta_0$  und  $\gamma_0 = 0$ . Ist

$$(\beta - \beta_0)^2 \ll \beta_0^2 \quad \text{und} \quad \gamma^2 \ll 1,$$

so ist  $\mathcal{H}_{R, \text{Dreh}} = \frac{\hbar^2}{6 B \beta_0^2} (\vec{I} - \vec{L})^2 \quad (27)$

und  $\mathcal{H}_{R, \text{Dreh}} + \mathcal{H}_P$  ergeben den HAMILTON-Operator (1), auf dem unsere Untersuchung der Kernrotation basierte.

Wenn wir die Größe  $\beta_0$  aus den Messungen der elektrischen Quadrupolmomente entnehmen — was sicher nicht ganz richtig ist —, so reduziert sich das Problem der Festlegung von  $\hbar^2/\Theta_R$  darauf, die Größe  $B$  zu bestimmen. Dies gelingt nicht in der gewünschten Strenge; für eine Näherungsrechnung gibt es jedoch zwei Wege:

**\alpha.** Man benutzt die Daten des Kernes, der mit dem „Rumpf“ des  $^{158}\text{Gd}$  identisch ist — oder, da dieser Kern nicht existiert, die Daten von Kernen, die sich von diesem möglichst wenig unterscheiden. Da die hier interessierenden Kerneigenschaften von Kern zu Kern wenig variieren, dürfte der so entstehende Fehler klein sein. Diese Kerne haben angeregte Zustände, die Vibrationen um die Gleichgewichtslage der Kugelgestalt entsprechen. Der Parameter  $B$  kann direkt aus den Matrixelementen für Strahlungsübergänge zwischen diesen Zuständen entnommen werden<sup>3</sup>; tut man dies<sup>5</sup>, so erhält man (mit  $\beta_0 = 0,46$ )

$$3 \hbar^2/\Theta_R = \hbar^2/B \beta_0^2 \approx 60 \text{ keV} \quad (28)$$

und  $3 \hbar^2/\Theta_{\text{eff}} \approx 35 \text{ keV}. \quad (28 \text{ a})$

Dieser Wert von  $\Theta_{\text{eff}}$  stimmt mit dem aus den Experimenten gewonnenen Wert (24) sehr schlecht überein. Nicht nur das aus (28 a) berechnete  $\Theta_{\text{eff}}$ , sondern bereits das  $\Theta_R$  aus (28) ist größer als das experimentell bestimmte Trägheitsmoment.

**\beta.** Die Energie der Nullpunktsschwingungen der  $\gamma$ -Vibrationen und die Gleichgewichtslage  $\beta_0$  der  $\beta$ -Vibrationen hängt vom Drehimpuls  $I$  des Kernes ab; dies liefert auch innerhalb einer Rotationsbande Abweichungen der Energien der Zustände von der einfachen Rotatorformel

$$E = E_0 + \frac{\hbar^2}{2 \Theta_{\text{eff}}} I(I+1) \quad (29)$$

derart, daß

$$E = E_0 + \frac{\hbar^2}{2 \Theta_{\text{eff}}} I(I+1) - F I^2(I+1)^2. \quad (30)$$

Zur Berechnung von  $F$  folgen wir einer Arbeit von BIRBRAIR, PEKER und SLIV<sup>6</sup>. Wir berücksichtigen dabei nur den Einfluß der  $\gamma$ -Vibration; der Beitrag der  $\beta$ -Vibrationen zur Größe von  $F$  darf hier vernachlässigt werden, da die Anregungsenergie  $\hbar \omega_\beta$  für die  $\beta$ -Vibration sehr groß ist — so groß, daß bisher beim  $^{158}\text{Gd}$  kein angeregter Zustand der  $\beta$ -Vibration beobachtet wurde. Beim  $^{158}\text{Gd}$  ist die zur Anregung einer  $\gamma$ -Vibration nötige Energie 1,182 MeV.

Wir setzen wie in Gl. (6 a) von<sup>6</sup>

$$(\hbar \omega_\gamma)^2 = \frac{\hbar^2}{2 \Theta_R} \cdot 6 C \beta_0^2, \quad (31)$$

vernachlässigen also völlig den Einfluß der Außenkerne auf die mit der  $\gamma$ -Vibration des Gesamtkernes verbundenen Energiedifferenzen\*. Dann ist in der Näherung  $S_1 \gg 1$ ,  $S_2 \ll 1$ , die gut erfüllt ist,

$$F = 4 \cdot \frac{\hbar^2}{2 \Theta_R} \left( \frac{\hbar^2}{2 \Theta_{\text{eff}}} \right)^2 \left( \frac{1}{\hbar \omega_\gamma} \right)^2. \quad (32)$$

Wenn man die Energien der Zustände aus der tiefsten Rotationsbande des  $^{158}\text{Gd}$  durch (30) darstellt, ergibt sich

$$\hbar^2/\Theta_{\text{eff}} = 13,25 \text{ keV}, \quad F = 11 \cdot 10^{-3} \text{ keV}. \quad (33)$$

Setzt man diese Werte in (32) ein, so folgt

$$3 \hbar^2/\Theta_R = 132 \text{ keV} \quad (34)$$

und damit nach (23)

$$3 \hbar^2/\Theta_{\text{eff}} = 70 \text{ keV}.$$

Es sei noch vermerkt, daß der Wert der mit der Oberflächenspannung zusammenhängenden Größe  $C$ , der aus (31) und (34) folgt, nämlich  $C = 51 \text{ MeV}$ ,

<sup>5</sup> P.W. STELSON u. F.K. MCGOWAN, Phys. Rev. **110**, 489 [1958].

<sup>6</sup> B. BIRBRAIR, L. PEKER u. L. SLIV, J. Exp. Theor. Phys., USSR **36**, 803 [1959]. — Wir weichen von dieser Rechnung in folgenden Punkten ab: 1. Die Ersetzung von  $\Theta_R$  durch  $\Theta_{\text{eff}}$ , die in Gl. (2 d) dieser Autoren vorgenommen

wird, unterbleibt. 2. Statt Wellenfunktionen des Typs  $|I, M, 0; 0\rangle$  bzw.  $|I, M, 2; 0\rangle$  benutzen wir Wellenfunktionen der Gestalt (3).

\* Es scheint bisher keine theoretische Untersuchung zu geben, die statt (31) eine befriedigendere Beziehung liefert.

gut mit dem die COULOMB-Effekte berücksichtigenden Wert (vgl. Gl. II, 6 b aus <sup>3</sup>) des dynamischen Stabilitätsparameters der WEIZSÄCKER-BETHE-Formel, nämlich  $C = 66 \text{ MeV}$ , übereinstimmt (beim Vergleich wurden die als „best fit“ angegebenen Werte der Analyse von GREEN <sup>7</sup> benutzt).

Gegen diese Methode der Bestimmung von  $\Theta_R$  kann erstens eingewandt werden, daß die zu (32)

<sup>7</sup> A. GREEN, Phys. Rev. **95**, 1006 [1954].

führenden Annahmen nicht streng erfüllt sind; zweitens gibt es außer den in (32) vermerkten noch andere zu  $I^2(I+1)^2$  proportionale Energiekorrekturen, die aus der Lösung des zu (1) gehörenden Eigenwertproblems entstehen, in unserer Rechnung jedoch vernachlässigt wurden.

Ich danke Herrn Prof. W. HEISENBERG für stetige Unterstützung und Förderung. Den Herren Prof. G. LÜDERS, Dr. W. BREINIG und Dr. P. MITTELSTAEDT bin ich wegen vieler Diskussionen und Hinweise verpflichtet.

## NOTIZEN

### Die Strahlungsintensität einer energiereichen Blitzlicht-Entladung zwischen 1250 und 1340 Å

Von K. D. BAYES, K. H. BECKER und KARL H. WELGE

Institut für Physikalische Chemie der Universität Bonn  
(Z. Naturforsch. **16 a**, 1089—1090 [1961]; eingeg. am 21. August 1961)

Quantenergiebigkeiten energiereicher Impulsentladungen für Blitzlichtphotolysen wurden u. a. von PORTER et al. <sup>1, 2</sup>, CLAESSEON et al. <sup>3</sup> bis etwa 2000 Å und von NELSON und RAMSAY bis 1450 Å <sup>4</sup> gemessen. Für photochemische Untersuchungen im Vakuum-UV interessierte die Größenordnung der Quantenergiebigkeit einer Blitzlichtentladung bei kürzeren Wellenlängen. Es wurden Messungen zwischen 1250 und 1340 Å bei Entladungsenergien bis 1400 Joule und Entladungszeiten von einigen Mikrosekunden durchgeführt.

#### Meßanordnung

Abb. 1 zeigt schematisch die Entladungsstrecke, die aus der inneren Elektrode  $E_1$ , der äußeren Ringelektrode  $E_2$ , einem Aluminiumoxydrohr R ( $d = 24 \text{ mm}$ ,  $l_1 = 35 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 10 \text{ mm}$ ) und einer Zündfunkenstrecke Z

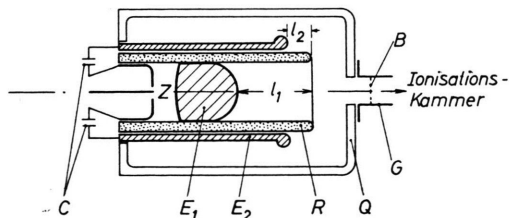


Abb. 1. Entladungskammer.

bestand. Sie war induktionsarm über koaxiale Leiter mit 11 parallelen Kondensatoren C von je  $10 \mu\text{F}$  Kapazität,  $110 \text{ m}\mu\text{H}$  Eigeninduktivität und  $5,1 \text{ kV}$  Maximalspannung verbunden. Die Entladungsstrecke befand sich in einem starkwandigen Quarzgehäuse Q. Über ein  $100 \text{ cm}$  langes und  $15 \text{ mm}$  weites Glasrohr G war zur Intensitätsmessung eine NO-Ionisationskammer nach WATANABE <sup>5</sup> mit einem  $\text{CaF}_2$ -Fenster von  $2,8 \text{ mm}$  Wandstärke angeschlossen. Unmittelbar vor dem Fenster blendete ein  $0,5 \text{ mm}$  breiter und  $6 \text{ mm}$  hoher Eintrittsspalt ein zu den Kammerelektroden paralleles Strahlenbündel aus. Vor der Entladung reduzierte eine Blende B die Intensität um  $98,5\%$ . Die Blende besaß auf einer Fläche von  $15 \text{ mm}$  Durchmesser 37 gleichmäßig verteilte Öffnungen von je  $0,3 \text{ mm}$  Durchmesser. Die Ionisationskammer wurde bei  $50 \text{ Volt}$  und  $0,8 \text{ Torr}$  NO-Druck betrieben. Ihr Sättigungsbereich lag zwischen  $10$  und  $90 \text{ Volt}$ .

Die Durchlässigkeitsgrenze des  $\text{CaF}_2$ -Fensters bei  $1250 \text{ Å}$  <sup>6</sup> und der steile Anstieg des Ionisationsquerschnitts von NO bei  $1340 \text{ Å}$  <sup>5, 7</sup> bestimmten den Meßbereich. In diesem Bereich wurde für die Berechnung der pro Entladung in die Ionisationskammer eintretenden Strahlung aus der gemessenen Ladung ein mittlerer Ionisationsquerschnitt von  $0,8 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$  zugrunde gelegt, die Gesamtabsorption des NO in der Kammer mit  $2,1 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$  berücksichtigt und ab  $1250 \text{ Å}$  vollständige Durchlässigkeit des Fensters ohne Reflexionsverluste angenommen. Die Ladungsmenge ergab sich aus dem integrierten Spannungsimpuls, der oszillographisch registriert wurde.

#### Ergebnisse

Die Versuche wurden mit Stickstoff und Wasserstoff bei einem Druck von  $6 \text{ Torr}$  in der Entladungskammer

<sup>1</sup> G. PORTER, Proc. Roy. Soc., Lond. A **200**, 284 [1950].

<sup>2</sup> M. I. CHRISTIE u. G. PORTER, Proc. Roy. Soc., Lond. A **212**, 398 [1952].

<sup>3</sup> S. CLAESSEON u. L. LINDQVIST, Ark. Kemi **11**, 535 [1957] u. **12**, 1 [1958].

<sup>4</sup> L. S. NELSON, J. Opt. Soc. Amer. **46**, 768 [1956]; L. S. NELSON u. D. A. RAMSAY, J. Chem. Phys. **25**, 372 [1956].

<sup>5</sup> K. WATANABE, F. F. MARMO u. E. C. Y. INN, Phys. Rev. **91**, 1155 [1953].

<sup>6</sup> W. M. POWELL, Phys. Rev. **45**, 154 [1934].

<sup>7</sup> K. WATANABE, J. Chem. Phys. **22**, 1564 [1954].